

Izbrane formule za pouk matematike

Srednje strokovno in poklicno-tehniško izobraževanje

1) Pravokotni koordinatni sistem

Razdalja med točkama oziroma dolžina daljice: $d(T_1, T_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Razpolovišče daljice: $R_{T_1 T_2} \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$

Ploščina trikotnika: $S = \frac{1}{2} \cdot |(x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_1) - (x_3 - x_1) \cdot (y_2 - y_1)|$

2) Linearna funkcija

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y = k \cdot x + n; \quad a \cdot x + b \cdot y = c; \quad \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

3) Kotne funkcije ostrega kota

Osnovne zveze med kot. funk.: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\tan x \cdot \cot x = 1$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Zveze med kotnimi funkcijami ostrega kota:

$$\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 x}}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} = \frac{\cot x}{\sqrt{1 + \cot^2 x}}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x} = \frac{1}{\cot x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = \frac{1}{\tan x}$$

4) Kvadratna funkcija

Rešitvi kvadratne enačbe oziroma ničli kvadratne funkcije: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a}$, $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$$y = f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x - p)^2 + q = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \quad (a \neq 0)$$

$$\text{Teme kvadratne funkcije: } T(p, q); \quad p = \frac{-b}{2 \cdot a} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad q = \frac{-D}{4 \cdot a} = f(p)$$

5) Trikotnik

$$\text{Enakostranični trikotnik: } S = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}, \quad v_a = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}, \quad r = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{6}, \quad R = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Pravokotni trikotnik: } S = \frac{a \cdot b}{2}, \quad \text{Evklidova izreka: } a^2 = a_1 \cdot c, \quad b^2 = b_1 \cdot c, \quad \text{višinski izrek: } v_c = \sqrt{a_1 \cdot b_1}$$

$$\text{Ploščina (poljubnega trikotnika): } S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin \beta}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2}$$

$$\text{Heronov obrazec (za ploščino poljubnega trikotnika): } S = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}, \quad s = \frac{o}{2} = \frac{a + b + c}{2}$$

$$\text{Polmera včrtanega in očrtanega kroga (poljubnega trikotnika): } r = \frac{S}{s}, \quad R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot S}$$

$$\text{Kosinusni izrek: } a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}, \quad \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}, \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$$

$$\text{Sinusni izrek: } \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2 \cdot R$$

6) Preostali liki

Kvadrat: $o = 4 \cdot a$, $d = a \cdot \sqrt{2}$, $S = a^2$

Pravokotnik: $o = 2 \cdot (a + b)$, $S = a \cdot b$

Paralelogram: $o = 2 \cdot (a + b)$, $S = a \cdot v_a = a \cdot b \cdot \sin \alpha$

Romb: $o = 4 \cdot a$, $S = \frac{e \cdot f}{2} = a \cdot v_a = a^2 \cdot \sin \alpha$

Trapez: $o = a + b + c + d$, $S = \frac{a + c}{2} \cdot v$

Deltoid: $o = 2 \cdot (a + b)$, $S = \frac{e \cdot f}{2}$

Poljubni štirikotnik: $o = a + b + c + d$, $S = \frac{e \cdot f \cdot \sin \varphi}{2}$

Pravilni n -kotnik (včrtan krogu s polmerom r):

$$a_n = 2 \cdot r \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}, o = n \cdot a_n, S_n = \frac{n \cdot r^2}{2} \cdot \sin \frac{360^\circ}{n}$$

Poljuben (izbočen) n -kotnik:

$$\text{število diagonal} = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}, \text{ vsota notranjih kotov} = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

Krog: $o = 2 \cdot \pi \cdot r = \pi \cdot d$, $S = \pi \cdot r^2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$

Krožni kolobar: $o = 2 \cdot \pi \cdot (R + r) = \pi \cdot (D + d)$, $S = \pi \cdot (R^2 - r^2) = \frac{\pi \cdot (D^2 - d^2)}{4}$

Krožni lok in krožni izsek: $l = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180^\circ}$, $S_i = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360^\circ}$

Krožni odsek: $S_o = S_i - S_\Delta = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360^\circ} - \frac{r^2 \cdot \sin \alpha}{2}$

7) Telesa

Zveza med maso, gostoto in prostornino teles: $m = \rho \cdot V$

Kocka: $P = 6 \cdot a^2$, $D = a \cdot \sqrt{3}$, $V = a^3$

Kvader: $P = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$, $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, $V = a \cdot b \cdot c$

Pokončna prizma: $P = 2 \cdot S + S_{pl}$, $V = S \cdot v$

Pokončni valj: $P = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot v$, $V = \pi \cdot r^2 \cdot v$; (votla cev: $V = S \cdot v$)

Pokončna piramida: $P = S + S_{pl}$, $V = \frac{S \cdot v}{3}$

Prisekana piramida: $P = S_1 + S_2 + pl$, $V = \frac{v \cdot (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2})}{3}$

Tetraeder: $P = a^2 \cdot \sqrt{3}$, $V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$

Pokončni stožec: $P = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$, $s = \sqrt{r^2 + v^2}$, $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot v}{3}$

Prisekani stožec: $P = \pi \cdot (R^2 + r^2 + (R + r) \cdot s)$, $s = \sqrt{(R - r)^2 + v^2}$, $V = \frac{\pi \cdot v \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2)}{3}$

Krogla: $P = 4 \cdot \pi \cdot r^2$, $V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$

8) Eksponentna funkcija

$$f(x) = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

9) Logaritemska funkcija

Definicija logaritma oziroma zveza med eksponentnim in logaritemskim zapisom: $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$

Sprememba logaritemske osnove: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\log x}{\log a} = \frac{\ln x}{\ln a}$

Pravila za logaritmiranje: $\log(x \cdot y) = \log x + \log y$, $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$, $\log(x^n) = n \cdot \log x$

$$f(x) = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

10) Polinomi in racionalna funkcija

Polinom: $p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \quad (a_n \neq 0)$

Racionalna funkcija: $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad (q(x) \neq 0)$

11) Statistika

a) Različni podatki:

$$\text{povprečje: } \bar{x}_A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$\text{standardni odklon: } \sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x}_A)^2 + (x_2 - \bar{x}_A)^2 + \dots + (x_n - \bar{x}_A)^2}{n}}$$

b) Grupirani podatki:

$$\text{povprečje: } \bar{x}_A = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + \dots + f_k \cdot x_k}{n}$$

$$\text{standardni odklon: } \sigma = \sqrt{\frac{f_1 \cdot (x_1 - \bar{x}_A)^2 + f_2 \cdot (x_2 - \bar{x}_A)^2 + \dots + f_k \cdot (x_k - \bar{x}_A)^2}{n}}$$

12) Zaporedja

Aritmetično zaporedje: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$, $s_n = \frac{n}{2} \cdot (2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d)$, $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$

Geometrijsko zaporedje: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (q \neq 1)$, $a_2 = \sqrt{a_1 \cdot a_3}$

Neskončna geometrijska vrsta: $s_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$, $|q| < 1$

13) Obrestni račun

a) Navadno obrestovanje:

$$\text{letno obrestovanje: } G_n = G_0 + \frac{G_0 \cdot p \cdot n}{100}$$

$$\text{vmesno (k-dnevno) obrestovanje: } G_k = G_0 + \frac{G_0 \cdot p \cdot k}{36500}$$

b) Obrestno obrestovanje:

$$\text{obrestovalni faktor: } r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$\text{letno obrestovanje: } G_n = G_0 \cdot r^n$$

$$\text{vmesno (k-dnevno) obrestovanje: } G_k = G_0 \cdot \left(\sqrt[365]{r}\right)^k$$

c) Obrestno-obrestni (kreditni) račun:

$$\text{skupen znesek kredita: } K = a_0 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad (a_0 \text{ je osnovni obrok ali anuiteta})$$

14) Kotne funkcije

Funkcije negativnih kotov: $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$, $\tan(-x) = -\tan x$, $\cot(-x) = -\cot x$

Adicijski izreki: $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$, $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta}, \quad \cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$$

Funkcije dvojnih kotov: $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}, \quad \cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cdot \cot \alpha}$$

Funkcije trojnih kotov: $\sin 3\alpha = 3 \cdot \sin \alpha - 4 \cdot \sin^3 \alpha$, $\cos 3\alpha = 4 \cdot \cos^3 \alpha - 3 \cdot \cos \alpha$

$$\tan 3\alpha = \frac{3 \cdot \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \cdot \tan^2 \alpha}, \quad \cot 3\alpha = \frac{\cot^3 \alpha - 3 \cdot \cot \alpha}{3 \cdot \cot^2 \alpha - 1}$$

Funkcije polovičnih kotov: $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$, $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

Faktorizacijski izreki: $\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\tan \alpha \pm \tan \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}, \quad \cot \alpha \pm \cot \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

Naklonski kot premice in presečni kot med premicama: $\tan \varphi_n = k$, $\tan \varphi_p = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|$

15) Odvod

Splošna pravila za odvajanje: $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Odvodi elem. funkcij: $(C)' = 0$, $(x)' = 1$, $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(e^x)' = e^x, \quad (a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

Geometrijski pomen prvega odvoda: $f'(x_0) = k_t = \tan \varphi_t$

16) Kombinatorika in verjetnostni račun

Permutacije brez ponavljanja

$$P_n = n!$$

Variacije brez ponavljanja

$$V_n^r = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-r+1)$$

Variacije s ponavljanjem

$${}^{(p)}V_n^r = n^r$$

Kombinacije brez ponavljanja

$$C_n^r = \binom{n}{r}$$

Verjetnost slučajnega dogodka A

$$P(A) = \frac{\text{število ugodnih izidov}}{\text{število vseh izidov}}$$